

Sistemi di rilevazione e correzione automatica di errori di trasmissione

Vitoantonio Bevilacqua

bevilacqua@poliba.it

Sommario. Il presente paragrafo si riferisce alle lezioni del corso di Fondamenti di Informatica e Laboratorio di Informatica del giorno 23 marzo 2010.

Parole chiave: Generatore di parità pari, Bit di parità, Check-sum, Bit di indirizzo errore, Decoder

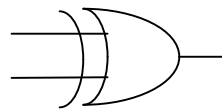
1 Introduzione

La trasmissione di un messaggio, che può essere ad esempio un carattere codificato nello standard ASCII in un certo numero n di bit, è un processo telecomunicativo che attraverso un “canale di trasmissione” formato da linee elettriche ciascuna delle quali trasmette il valore di ogni singolo bit, trasmette il messaggio da un trasmettitore a un ricevitore. In un processo del genere può accadere accidentalmente un errore su una o più linee di trasmissione, alterando il messaggio che arriverà al ricevitore. Per evitare che ciò accada, esistono dei meccanismi di rilevazione di errore e anche di correzione.

1.1 La porta logica XOR

Questi meccanismi si avvalgono di una speciale porta logica detta “or esclusivo”, denotata dalla sigla XOR, la cui rappresentazione grafica e tavola della verità sono le seguenti:

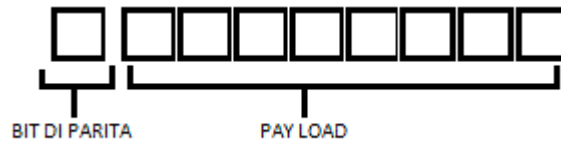
A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



la porta è detta “generatore di parità pari elementare” in quanto esegue un’operazione, indicata dal simbolo “ \oplus ”, che conta il numero di 1 presenti in sequenza e restituisce 0 se il numero di 1 è pari, 1 se il numero di 1 è dispari; è detta elementare poiché le variabili di ingresso sono due.

2 Meccanismo di rilevazione a singolo errore di trasmissione

Data una sequenza formata da un certo numero n di bit da trasmettere, il più semplice meccanismo di rilevazione di un errore consiste nell'aggiungere agli n bit un altro bit, detto "bit di parità", il cui valore sarà il risultato dell'operazione di XOR eseguita sugli n bit da trasmettere. Il messaggio che quindi viene trasmesso è formato dagli n bit iniziali detti bit di "pay load", ossia il contenuto informativo del messaggio, più il bit di parità (se i bit di parità sono più di uno, questi vengono detti bit di "check sum"):



A questo punto il sistema in ricezione, controllando il numero di 1 presenti in sequenza e il conseguente valore del bit di parità, verifica se la trasmissione è avvenuta in modo corretto o se vi è stato un errore di trasmissione (per cui il numero di 1 è dispari mentre il bit di parità ha valore 0 o viceversa); in tal caso il sistema avvisa la fonte richiedendone la ritrasmissione.

Questo meccanismo tuttavia presenta i seguenti svantaggi:

- richiede del tempo, nel caso venga rilevato un errore, per la ritrasmissione del messaggio;
- se è presente un numero pari di errori, benché molto improbabile, il meccanismo va in crisi in quanto interpreterà come corretta la trasmissione.

La probabilità di errore nella trasmissione su ogni singola linea è molto bassa, infatti questo si verifica in media $1/10^7$ volte.

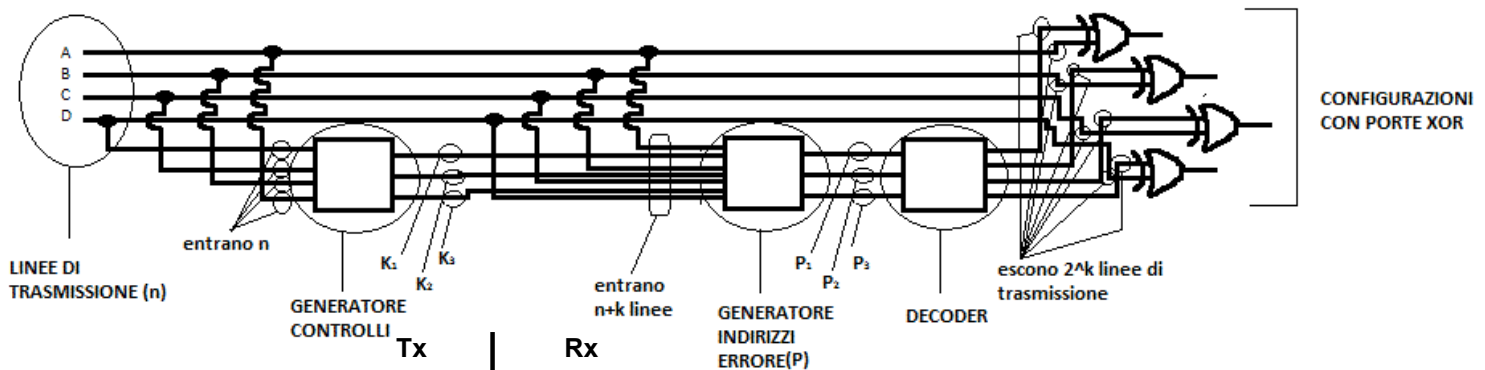
Dunque, essendo le trasmissioni su due linee due eventi indipendenti, la probabilità che si verifichino due errori in contemporanea è di $1/10^{14}$ volte.

Tuttavia, benché il sistema risulti lento solo in $1/10^7$ casi e vada in crisi in $1/10^{14}$, la tolleranza agli errori è bassa e quindi il sistema è debole.

3 Codice di Hamming

Per eliminare lo svantaggio di dover aspettare la ritrasmissione, nel caso venga rilevato un errore, si introduce un meccanismo di rilevazione e automatica correzione di un errore, che prende il nome di "sistema di Hamming", dall'ideatore del codice su cui è basato.

Tale sistema rileva e corregge automaticamente un singolo errore che può verificarsi nella trasmissione di un messaggio formato da un qualsiasi numero n di bit. Per



comodità, qui di seguito verrà illustrato il sistema di Hamming ipotizzando che il messaggio da trasmettere sia costituito da 4 bit.

Ipotizziamo di dover trasmettere quindi un messaggio formato da 4 bit lungo un canale di trasmissione formato da 4 linee e diviso in due parti: la trasmissione (Tx) e la ricezione (Rx). Il sistema di Hamming è costituito da:

- un "generatore controlli" o "generatore bit di controllo" nella Tx in cui entrano n linee ed escono k linee, dove k è il numero di bit di controllo o di check-sum;
 - o il valore di k è uno tra i valori che soddisfano la seguente disequazione:

$$2^k \geq n+k+1;$$

tuttavia è opportuno prendere il minimo valore di k tra tutti quelli che soddisfano la disequazione, in quanto definito l' "over head", ossia lo svantaggio economico determinato dall'aggiunta di linee di check sum, come rapporto $k/(n+k)$ o più semplicemente k/n , è importante ottenere un over head minimo possibile.

Nel nostro caso specifico, $n=4$ e dunque $k=3$.

- o per calcolare le configurazioni che codificano i bit di check-sum e quindi calcolarne il loro valore, si introducono altre k variabili, denotate " P_k ", che corrisponderanno ai "bit di indirizzo errore" generati nella Rx, e si costruisce una tabella¹ dove vengono rappresentate tutte le possibili configurazioni delle variabili P. Nel nostro caso quindi tre variabili, dette P_1, P_2, P_3 , e la seguente tabella:

P_1	P_2	P_3	
0	0	0	OK
0	0	1	K_1
0	1	0	K_2
0	1	1	D
1	0	0	K_4
1	0	1	C
1	1	0	B

¹ k colonne, tante quanti sono i bit di indirizzo errore, e 2^k righe: la prima riga di tutti 0 è la OK, poi si assegnano le righe in cui è presente una potenza di 2 al bit di controllo K con l'indice corrispondente ($001 \rightarrow K_1, \dots, 100 \rightarrow K_4$) e in seguito ogni riga rimasta libera in ordine alfabetico partendo dall'ultima riga agli n bit di pay load, finché non saranno state assegnate $n+k+1$ righe a

1	1	1	A
---	---	---	---

La configurazione costituita da soli 0 rappresenta l' "OK", ossia indica che non si è verificato alcun errore. Si scrivono le formule² per calcolare le p e le si impongono uguali a 0, quindi si esplicitano le k, una per ogni formula, e si calcolano: in una trasmissione priva di errori deve essere

- $P_1 = K_1 \oplus D \oplus C \oplus A = 0$ da cui $K_1 = A \oplus C \oplus D$
- $P_2 = K_2 \oplus D \oplus B \oplus A = 0$ da cui $K_2 = A \oplus B \oplus D$
- $P_3 = K_4 \oplus C \oplus B \oplus A = 0$ da cui $K_4 = A \oplus B \oplus C$

Successivamente, dopo la Tx, le n+k linee passano attraverso il canale di comunicazione e raggiungono alla Rx, nel "generatore indirizzo errore" dal quale escono k linee che rappresentano i bit di errore P, ciascuno calcolato utilizzando le formule precedenti.

In seguito i k bit di errore P entrano nel decoder, dal quale escono 2^k linee, delle quali tuttavia ci interessano solamente le n linee del pay load. Il meccanismo di funzionamento del decoder è rappresentato dalla seguente tavola:

linee in entrata			linee in uscita							
P ₁	P ₂	P ₃	OK	K ₁	K ₂	D	K ₄	C	B	A
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

In uscita dal decoder, in corrispondenza della configurazione assunta dai bit di indirizzo errore, le linee in uscita valgono tutte 0, ossia sono spente, ad eccezione della linea OK, se non vi sono errori, o di un'altra linea in cui è avvenuto l'errore di trasmissione, che vale 1 e quindi viene "accesa".

Al termine sono presenti n porte XOR aventi in ingresso le n linee di pay load che arrivano dalla trasmissione e dal decoder. Se la linea accesa dal decoder è una linea di pay load, questa fa cambiare, attraverso la XOR corrispondente, il valore della linea che aveva subito l'errore di trasmissione, riportandola al valore iniziale.

² il valore di ciascuna variabile P è dato dall'operazione di XOR eseguita sulle linee corrispondenti al valore 1 nella propria colonna

Ringraziamenti. Il presente capitolo è stato scritto anche grazie al prezioso contributo degli studenti Donato Mancuso, Giuseppe Ragno.

Riferimenti

1. Bevilacqua, V.: Dispense Linguaggio C In: <http://www.vitoantoniobevilacqua.it>
2. [http://it.wikipedia.org/wiki/Codice di Hamming](http://it.wikipedia.org/wiki/Codice_di_Hamming)